Matemáticas Harmónicas

José Antonio Pérez Álvarez

Resumen

En este texto se fundan tres nuevas ramas de las matemáticas, el álgebra harmónico, la geometría harmónica y el cálculo diferencial y integral harmónico, otras ramas serán discutidas en futuros trabajos. La palabra “harmónico” se refiere a la operaciones duales de la aritmética tradicional, pero también puede ser el concepto dual a la linealidad. Se puede decir que todo resultado aritmético tiene un resultado dual harmónico, lo mismo con el álgebra, la geometría y el cálculo.

Probablemente, los hitos más importantes de este trabajo son el descubrimiento del semigrupo de números armónicos, el teorema dual del álgebra, los espacios afínes harmónicos y euclidianos harmónicos, y el teorema dual del cálculo diferencial.

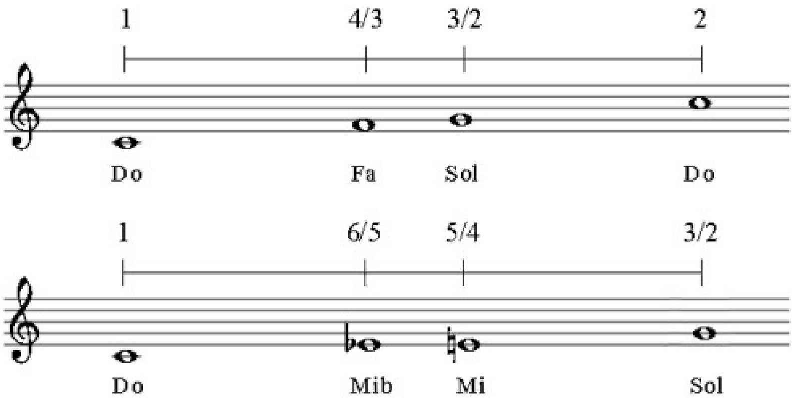
«Matemáticas Harmónicas» está escrito integramente por José Antonio Pérez Álvarez en julio del año 2017 en El Puerto de Santa María, Cádiz, España.

Primera revisión:

Matemáticas Harmónicas

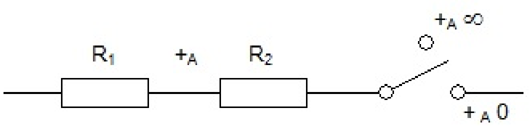
1 Álgebra harmónico.

Los precedentes de la matemática harmónica están relacionados con la teoría musical antigua, la teoría de la consonancia en particular. Los sonidos más consonantes son las relaciones más simples entre las frecuencias de los diferentes tonos en una escala o un acorde. Las herramientas matemáticas para encontrar las consonancias y justificar los fenómenos son la media aritmética y la media harmónica. La dualidad implícita de estas dos operaciones tiene una interpretación psicoacústica que otorga cualitativamente la estabilidad a las tríadas mayores y menores respectivamente.



Está muy lejos del propósito de este artículo el dar una explicación exhaustiva sobre este hecho porque su alcance implica una revisión de la distorsión de los sistemas dinámicos en la física, pero es en realidad el origen y la motivación de estas investigaciones matemáticas.

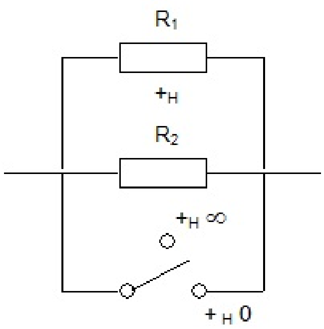
La mejor manera de comprender los principios de las matemáticas harmónicas está en la teoría de circuitos. La adición aritmética es análoga a la asociación de resistores en paralelos, y la adición harmónica es análoga a la asociación de resistores en paralelo.



$$R +_A 0 = R$$

$$R +_A \infty = \infty$$

Con estos ejemplos es evidente que el elemento infinito es el elemento neutro para la adición armónica, también el elemento cero es el elemento absorbente.



$$R +_H 0 = 0$$

$$R +_H \infty = R$$

1.1 Estructuras básicas del álgebra harmonico.

El semigrupo de números armónicos es un conjunto regular al álgebra clásica a pesar de su novedad, pero no lo son otras estructuras de álgebra harmónica más complejas. La diferencia radical es el elemento neutro para la adición harmónica, el elemento neutro que se necesita para las estructuras harmónicas de álgebra es el elemento infinito.

1.1.1 El semigrupo de los números harmónicos.

La adición harmónica proporciona estructura de semigrupo al conjunto de los números de harmónicos. De hecho, la adición armónica es conmutativa y asociativa. Se puede decir que la adición harmónica suma los denominadores de dos números harmónicos.

Notación 1. *La adición harmónica será notada como $+_H$, y la aritmética tradicional como $+_A$ o $+$ simplemente. En contextos de teoría de circuitos la adición harmónica ha sido anotada como una suma paralela $||$.*

Notación 2. *El superíndice H denota la inversión armónica, el recíproco de un elemento o un conjunto completo en general. La inversión harmónica de elementos o conjuntos es una operación involuntiva.*

Definición 3. *El semigrupo de los números harmónicos es el conjunto de los recíprocos de todos los números naturales con la adición harmónica como operación binaria interna.*

$$\mathbb{N}^H = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$+_H \colon \mathbb{N}^H \times \mathbb{N}^H \to \mathbb{N}^H \colon (a, b) \to \frac{a \cdot b}{a + b}$$

La adición harmónica es conmutativa y asociativa:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^H \Rightarrow \exists c \colon a +_H b = c \in \mathbb{N}^H$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}^H \Rightarrow (a +_H b) +_H c = a +_H (b +_H c)$$

$$\frac{1}{n} +_H \frac{1}{m} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}}{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \frac{1}{n+m}$$

$$\left(\frac{1}{n} +_H \frac{1}{m} \right) +_H \frac{1}{l} = \frac{\frac{1}{n+n} \cdot \frac{1}{l}}{\frac{1}{n+m} + \frac{1}{l}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m+l}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m+l}} = \frac{1}{n} +_H \left(\frac{1}{m} +_H \frac{1}{l} \right)$$

Teorema 4. *Teorema fundamental de la harmónica. La representación canónica de un número harmónico positivo mediante el producto de los reciprocos de potencias enteras α_i de un número primo p_i es única.*

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{1}{p_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{1}{p_m^{\alpha_m}} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$$

Bibliografía

ALGEBRA I - Pedro Jiménez Guerra, UNED, Madrid, 1993, ISBN: 84-362-1703-9.

ANÁLISIS MATEMÁTICO I - Jesús Fernandez Novoa, UNED, Madrid, 1994, ISBN: 84-362-1667-9.

GEOMETRÍAS LINEALES Y GRUPOS DE TRANSFORMACIÓN - Antonio Félix Costa González, Javier Lafuente López, UNED, Madrid, 1991, ISBN: 84-362-2253-9.