

Matemáticas Harmónicas

JOSÉ ANTONIO PÉREZ ÁLVAREZ

© 30/07/2018 José Antonio Pérez Álvarez,
El Puerto de Santa María, Cádiz, España.
www.armoniamoderna.com

Resumen

En este texto se fundan tres nuevas ramas de las matemáticas, el álgebra armónico, la geometría armónica y el cálculo diferencial y integral armónico, otras ramas serán discutidas en futuros trabajos. La palabra “armónico” se refiere a la operaciones duales de la aritmética tradicional, pero también puede ser el concepto dual a la linealidad. Se puede decir que todo resultado aritmético tiene un resultado dual armónico, lo mismo con el álgebra, la geometría y el cálculo.

Probablemente, los hitos más importantes de este trabajo son el descubrimiento del semigrupo de números armónicos, el teorema dual del álgebra, los espacios afines armónicos y euclidianos armónicos, y el teorema dual del cálculo diferencial.

«Matemáticas Armónicas» está escrito íntegramente por José Antonio Pérez Álvarez en julio del año 2017 en El Puerto de Santa María, Cádiz, España.

Primera revisión:

© 30/07/2018, José Antonio Pérez Álvarez, El Puerto de Santa María.

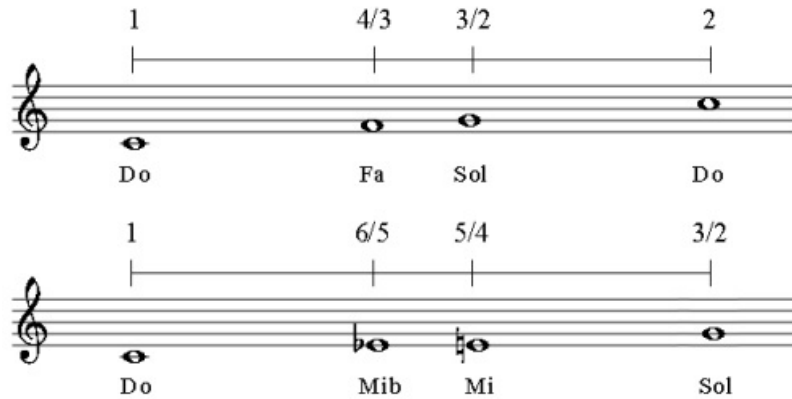
Matemáticas Harmónicas

Resumen	3
1 Álgebra harmónico.	7
1.1 Estructuras básicas del álgebra harmónico.	7
1.1.1 El semigrupo de los números harmónicos.	8
1.1.2 Semianillo harmónico.	9
1.1.3 Anillo harmónico.	9
1.1.4 Cuerpo harmónico.	9
Cuerpo racional harmónico.	9
El cuerpo real harmónico.	9
Dualidad aritmético-harmónica.	10
1.1.5 Cuerpo complejo harmónico.	10
1.1.6 Espacio vectorial harmónico.	12
Independencia harmónica.	12
Cambio de coordenadas.	13
1.2 Funciones harmónicas.	13
1.2.1 Homomorfismo harmónico.	13
1.2.2 Ecuaciones de un homomorfismo harmónico.	14
1.2.3 Espacio dual de covectores harmónicos.	14
1.2.4 Forma harmónica.	15
1.2.5 Forma multiharmónica.	15
1.2.6 Producto tensorial de formas multiharmónicas.	16
1.2.7 Producto exterior harmónico.	16
1.2.8 Formas multiharmónicas alternadas.	17
1.3 Polinomios harmónicos.	17
1.3.1 Teorema fundamental del álgebra harmónico.	18
1.3.2 Teorema dual del álgebra.	18
1.4 Matrices harmónicas.	19
1.4.1 Suma harmónica de matrices.	19
1.4.2 Multiplicación harmónica de matrices.	19
1.4.3 Determinante harmónico.	20
1.4.4 Matriz adjunta harmónica.	21
1.4.5 Matriz inversa harmónica para la multiplicación harmónica.	21
1.4.6 Traza harmónica.	22
1.5 Sistemas de ecuaciones harmónicas.	22
1.6 Endomorfismos harmónicos.	22
1.6.1 Polinomio harmónico característico.	23
1.6.2 Dualidad aritmético-harmónica de los polinomios característicos.	24
1.7 Formas biarmónicas y cuadráticas harmónicas.	26
1.7.1 Propiedades de las formas biharmónicas.	26
1.7.2 Propiedades de las formas cuadráticas harmónicas.	26
1.7.3 Expresión analítica de una forma cuadrática harmónica.	27
1.7.4 Matrices congruentes.	27
1.7.5 Diagonalización de formas cuadráticas harmónicas.	28
2 Geometría harmónica.	29
2.1 Espacios afines harmónicos.	29

2.1.1	Plano afín harmónico.	29
	Recta harmónica.	29
	Rectas harmónicas paralelas.	31
	Sistema de referencia afín hármonico.	31
	Ecuaciones de las rectas harmónicas.	32
	Orientación en el plano harmónico.	33
2.1.2	Espacio afín harmónico.	33
	Variedades harmónicas.	33
	Variedades paralelas.	33
	Cambio de sistema de referencia.	34
	Ecuaciones del plano harmónico.	34
	Ecuaciones de la recta harmónica.	34
	Orientación en el espacio afín harmónico.	35
2.2	Espacio vectorial euclídeo harmónico.	35
2.2.1	Producto escalar harmónico.	35
	Módulo harmónico.	35
	Distancia harmónica.	36
	Ángulo entre dos vectores harmónicos.	36
	Vectores harmónicamente ortogonales.	36
2.2.2	Espacio euclídeo harmónico bidimensional.	37
2.2.3	Espacio euclídeo harmónico tridimensional.	37
	Producto vectorial harmónico.	38
	Producto mixto harmónico.	38
3	Cálculo harmónico.	39
3.1	Derivación harmónica.	39
3.1.1	Continuidad en el cuerpo real harmónico.	39
3.1.2	Notación extendida para la derivada aritmética.	40
3.1.3	Derivada harmónica.	40
3.1.4	Teorema dual del cálculo diferencial.	41
3.1.5	Derivabilidad harmónica.	42
3.1.6	Fórmulas útiles de la derivación harmónica.	42
3.1.7	Derivacion harmónica sucesiva.	43
3.1.8	Versión harmónica de la serie de Taylor.	43
3.2	Integración harmónica.	43
3.2.1	Fórmulas para la integración harmónica.	44
3.2.2	Teorema dual del cálculo integral.	45
3.2.3	Integral harmónica definida.	45
	Suma harmónica de Riemann.	45
	Teorema dual de la integral definida.	46
3.2.4	Integrales harmónicas impropias.	46
	Dominio de integración en el cuerpo real harmónico.	47
	Función gamma harmónica.	47
	Bibliografía	49

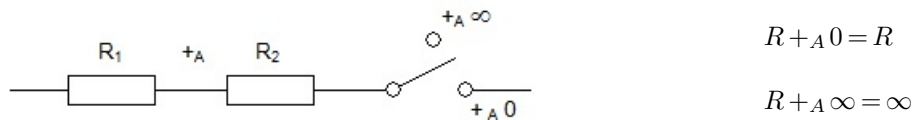
1 Álgebra harmónico.

Los precedentes de la matemática harmónica están relacionados con la teoría musical antigua, la teoría de la consonancia en particular. Los sonidos más consonantes son las relaciones más simples entre las frecuencias de los diferentes tonos en una escala o un acorde. Las herramientas matemáticas para encontrar las consonancias y justificar los fenómenos son la media aritmética y la media harmónica. La dualidad implícita de estas dos operaciones tiene una interpretación psicoacústica que otorga cualitativamente la estabilidad a las tríadas mayores y menores respectivamente.

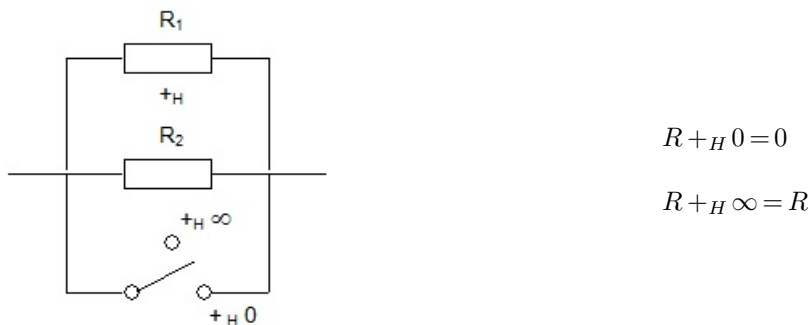


Está muy lejos del propósito de este artículo el dar una explicación exhaustiva sobre este hecho porque su alcance implica una revisión de la distorsión de los sistemas dinámicos en la física, pero es en realidad el origen y la motivación de estas investigaciones matemáticas.

La mejor manera de comprender los principios de las matemáticas harmónicas está en la teoría de circuitos. La adición aritmética es análoga a la asociación de resistores en paralelos, y la adición harmónica es análoga a la asociación de resistores en paralelo.



Con estos ejemplos es evidente que el elemento infinito es el elemento neutro para la adición armónica, también el elemento cero es el elemento absorbente.



1.1 Estructuras básicas del álgebra harmónico.

El semigrupo de números armónicos es un conjunto regular al álgebra clásica a pesar de su novedad, pero no lo son otras estructuras de álgebra harmónica más complejas. La diferencia radical es el elemento neutro para la adición harmónica, el elemento neutro que se necesita para las estructuras harmónicas de álgebra es el elemento infinito.

1.1.1 El semigrupo de los números harmónicos.

La adición harmónica proporciona estructura de semigrupo al conjunto de los números de harmónicos. De hecho, la adición armónica es conmutativa y asociativa. Se puede decir que la adición harmónica suma los denominadores de dos números harmónicos.

Notación 1. La adición harmónica será notada como $+_H$, y la aritmética tradicional como $+_A$ o $+$ simplemente. En contextos de teoría de circuitos la adición harmónica ha sido anotada como una suma paralela \parallel .

Notación 2. El superíndice H denota la inversión armónica, el recíproco de un elemento o un conjunto completo en general. La inversión harmónica de elementos o conjuntos es una operación involutiva.

Definición 3. El semigrupo de los números harmónicos es el conjunto de los recíprocos de todos los números naturales con la adición harmónica como operación binaria interna.

$$\mathbb{N}^H = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$+_H: \mathbb{N}^H \times \mathbb{N}^H \rightarrow \mathbb{N}^H: (a, b) \rightarrow \frac{a \cdot b}{a + b}$$

La adición harmónica es conmutativa y asociativa:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^H \Rightarrow \exists c: a +_H b = c \in \mathbb{N}^H$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}^H \Rightarrow (a +_H b) +_H c = a +_H (b +_H c)$$

$$\frac{1}{n} +_H \frac{1}{m} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}}{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \frac{1}{n+m}$$

$$\left(\frac{1}{n} +_H \frac{1}{m} \right) +_H \frac{1}{l} = \frac{\frac{1}{n+n} \cdot \frac{1}{l}}{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{l}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m+l}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m+l}} = \frac{1}{n} +_H \left(\frac{1}{m} +_H \frac{1}{l} \right)$$

Teorema 4. Teorema fundamental de la harmónica. La representación canónica de un número harmónico positivo mediante el producto de los recíprocos de potencias enteras α_i de un número primo p_i es única.

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{1}{p_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{1}{p_m^{\alpha_m}} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$$

Bibliografía

ALGEBRA I - Pedro Jiménez Guerra, UNED, Madrid, 1993, ISBN: 84-362-1703-9.

ANÁLISIS MATEMÁTICO I - Jesús Fernandez Novoa, UNED, Madrid, 1994, ISBN: 84-362-1667-9.

GEOMETRÍAS LINEALES Y GRUPOS DE TRANSFORMACIÓN - Antonio Félix Costa González, Javier Lafuente López, UNED, Madrid, 1991, ISBN: 84-362-2253-9.